Метод рационализации

(метод равносильной замены множителей)

Логарифмы

Теорема 1. *Логарифмическое неравенство*

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \geq 0$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Сведение логарифмических неравенств к системе рациональных неравенств

$$\log_a f - \log_a g \leftrightarrow (a-1)\left(f - g\right)$$

$$\log_a f - 1 \leftrightarrow (a-1)\left(f - \mathrm{a}\right)$$

$$\log_a f \leftrightarrow (a-1)\left(f - 1\right)$$

$$\log_a f + g \leftrightarrow (a-1)\left(f \cdot a^g - 1\right)$$

$$\log_a f - g \leftrightarrow (a-1)\left(f - a^g\right)$$

$$\log_a f + \log_a g \leftrightarrow (a-1)\left(f \cdot g - 1\right)$$

$$\log_h f \cdot \log_p q \leftrightarrow (\mathrm{h}-1)\left(f - 1\right)(\mathrm{p}-1)\left(\mathrm{q} - 1\right)$$

Сведение показательного неравенства к системе рациональных неравенств

Теорема 2. *Показательное неравенство*

$$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \geq 0$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$$

Сведение показательного неравенства к системе рациональных неравенств

$$a^{f}-a^{g}\leftrightarrow(a-1)(f-g)$$

$$a^{f}-1\leftrightarrow f(a^{f}-1)$$

$$a^{f}-g\leftrightarrow(a-1)(f-\log_{a}g)\text{где}\,\mathrm{g}\geq 0$$

$$f^{h}-g^{h}\leftrightarrow(f-g)\cdot \mathrm{h}$$

$$(a^{f}-a^{g})(a^{p}-a^{q})\leftrightarrow(\mathrm{p}-q)(f-g)$$

Сведение неравенств с модулем к системе рациональных неравенств

$$(|f|-|g|)\leftrightarrow f^2-g^2=(f-g)(f+g).$$

$$(|f|-g)\leftrightarrow (f-g)(f+g),\quad (g\geq 0).$$

$$\left(|f|-(\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c})\right)\xleftrightarrow[(g\geq 0)]{(a>0,D<0)}(\mathrm{f}+\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c})(\mathrm{f}-\mathrm{ax}^2-\mathrm{bx}-\mathrm{c})$$

$$\left(|f|-\sqrt{g}\right)\leftrightarrow f^2-g.$$

$$(\sqrt{f}-g)\leftrightarrow f-g^2 \qquad ,$$

$$|f|\leftrightarrow f^2.$$

$$\sqrt{|f|}\leftrightarrow f^2.$$

Сведение неравенств с модулем к системе рациональных неравенств

$$\left(\sqrt{f}-\sqrt{g}\right) \leftrightarrow (f-g)$$

$$\left(\sqrt{f}-\sqrt{|g|}\right) \leftrightarrow (f-g)(f+g)$$

$$\left(\sqrt{|f|}-g\right) \leftrightarrow (f-g^2)(f+g^2) \qquad (g \geq 0)$$

$$\left(|f|-\sqrt{|g|}\right) \leftrightarrow (f^2-g)(f^2+g).$$

$$\left(\sqrt{|f|}-\sqrt{|g|}\right) \leftrightarrow (f-g)(f+g)$$

$$\sqrt{f} \leftrightarrow f.$$