Еще раз о замечательных точках треугольника

I. Точка пересечения высот (ортоцентр)

Теорема 1*. Точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC делит его высоту BB_1 на отрезки*, *отношение которых, считая от вершины*, *равно*

$$\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cos\angle C}.$$

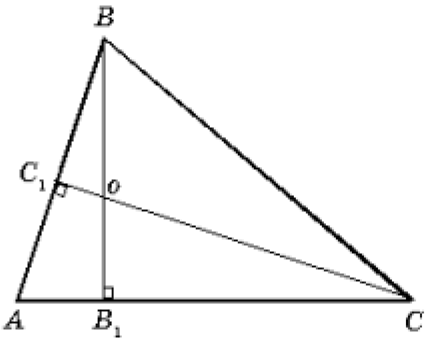


Рис. 1

Доказательство.

1) $\Delta\ BC_1O$ *– прямоугольный, и (рис. 1)*

$$BO=\frac{BC_1}{\cos\angle ABO}=\frac{BC_1}{\cos\left(90^\circ-\angle A\right)}=\frac{BC_1}{\sin\angle A}.$$

2) $\Delta\ BC_1C$ – прямоугольный, и

$$BC_1=BC\cos\angle B=a\cos\angle B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO=\frac{a\cos\angle B}{\sin\angle A}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle B}=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}$$

$$\left(\text{по теореме синусов }\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}\right).$$

3)

$$OB_1=BB_1-BO=c\sin\angle A-\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}=$$

$$=\frac{c\left(\sin\angle A\sin\angle B\right)}{\sin\angle C}=\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

4)

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle A}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}=$$

$$=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cos\angle C}.\qquad(*)$$

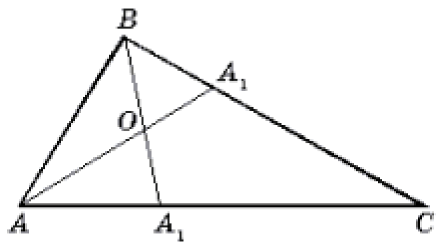
Замечание. Если один из углов тупой, то в (*) соответствующий косинус нужно взять по модулю.

II. Точка пересечения биссектрис (ицентр)

Теорема 2. *Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то*

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a},$$

где AA_1 – биссектриса угла A, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ (рис. 2).



Доказательство. 1) В $\Delta\ ABC\ AA_1$ – биссектриса $\angle A$, поэтому

$AB : AC = BA_1 : CA_1 = BA_1 : (BC - BA_1)$ и $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$.

2) В $\Delta\ ABA_1\ BO$ – биссектриса $\angle\ B$, поэтому $AO : OA_1 = BA : BA_1$

и $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$. (**)

III. Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра и ицентра

1. *Расстояние от вершины до ортоцентра*

Из 2) доказательства теоремы 1 следует, что $BO = b\,|\operatorname{ctg} \angle\ B\,| = 2R\,|\cos \angle\ B\,|$

(для треугольников произвольных по виду) или $BO = \frac{|\cos \angle\ C\,|}{\sin \angle\ A\ \sin \angle\ B} BB_1$.

Пример 1. Найти расстояние от вершины B треугольника ABC до ортоцентра, если $AC = 5\sqrt{7}$, $CB = 4\sqrt{7}$, $BA = 6\sqrt{7}$.

По теореме косинусов $\cos \angle\ B = \frac{9}{16}$. Тогда $\sin \angle\ B = \frac{5\sqrt{7}}{16}$, $\operatorname{ctg} \angle\ B = \frac{9}{5\sqrt{7}}$.

Поэтому $BO = 9$.

2. *Расстояние от вершины до точки пересечения биссектрис треугольника (иццентра, центра вписанной окружности)*

Из теоремы 2 следует, что $AO = \frac{b+c}{a+b+c} AA_1 = \frac{b+c}{a+b+c} l_a$.

Так как $AA_1 = \frac{\sqrt{ab(b+c-a)(a+c+b)}}{b+c}$, то получим

$$AO = \sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{b+c+a}} = \sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}} \quad \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

Можно доказать, что $AO^2 = bc - 4Rr$.

Пример 2. В треугольнике *ABC AB* = 8 см, *BC* = 7 см, *CA* = 6 см. Найти расстояние от точки *A* до точки пересечения биссектрис.

Решение. Найдем биссектрису угла *A*: AA_1 = 6 см.

$$AO = \frac{b+c}{a+b+c} AA_1 = 4 \text{ см.}$$

IV. Расстояние между «замечательными» точками

1. *Между центром вписанной окружности и точкой пересечения медиан (центр тяжести)* – рис. 3.

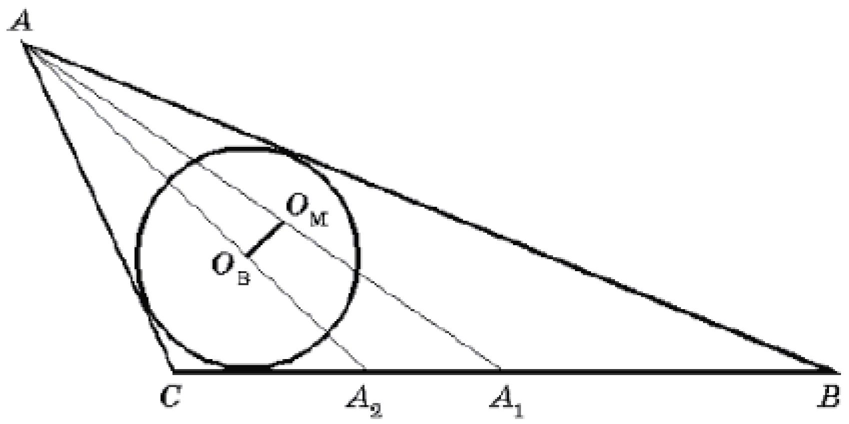


Рис. 3

Способ I (векторный). Пусть $\overline{AC} = \vec{b}$, $\overline{AB} = \vec{c}$, $\angle CAB = \alpha$.

1) По свойству медиан имеем $\overline{AO_M} = \frac{2}{3}\overline{AA_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$.

2) Из (**) следует, что $AO_B : O_BA_2 = (b + c) : a$, поэтому $AO_B : AA_2 = (b + c) : (b + c + a)$. По свойству биссектрисы треугольника $AC : AB = CA_2 : A_2B$, тогда $CA_2 = \frac{b \cdot CB}{b+c}$.

Следовательно,

$$\overline{AO_B} = \frac{b+c}{a+b+c}\overline{AA_2},\ \overline{AA_2} = \overline{AC} + \overline{CA_2} =$$
$$= \vec{b} + \frac{b}{b+c}\overline{CB} = \frac{c}{b+c}\vec{b} + \frac{c}{b+c}\vec{c}.$$

Тем самым получим

$$\overline{AO_B} = \frac{c}{a+b+c}\vec{b} + \frac{b}{a+b+c}\vec{c}.$$

3) Из рис. 3 $\overline{O_MO_B} = \frac{1}{3(a+b+c)}\Big((2c-a-b)\vec{b} + (2b-a-c)\vec{c}\Big).$

4) Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$,

и можно получить равенство

$$O_MO_B^{\ 2} = \frac{4\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) - 5abc(a+b+c) + ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c - a^4 - b^4 - c^4}{9(a+b+c)^2}$$

Одним из упрощений равенства будет $O_MO_B^{\ 2} = \dfrac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}$

Пример 3. $AC = 6$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найти расстояние между центром вписанной окружности и точкой пересечения медиан.

Решение. Из теоремы 2 следует, что

$$AO_B : O_BA_2 = 14 : 7 = 2 : 1$$

$$\text{и } \ OA_B : AA_2 = 2 : 3.$$

По свойству биссектрисы треугольника $AC : AB = CA_2 : A_2B$,

тогда $CA_2 = \dfrac{3CB}{7}$

Следовательно, $\overline{AO_B} = \dfrac{8}{21}\vec{b} + \dfrac{6}{21}\vec{c}$

Тогда $\overline{O_MO_B} = \dfrac{1}{21}\left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины и $2bc\cos\alpha = 51$, то $(O_MO_B)^2 = \dfrac{1}{9}$

Ответ: $O_MO_B = \dfrac{1}{3}$

Замечание. В данном примере можно было сделать вывод, что O_MO_B С A_1A_2, так как $OA_B : AA_2 = 2 : 3 = AO_M : AA_1$ и поэтому $O_BO_M = \dfrac{2A_2A_1}{3} = \dfrac{2\left(CA_1 - CA_2\right)}{3}$, $O_BO_M = \dfrac{1}{3}$.

Способ II. 1) Найти медиану $AA_1 = m_a$ и $AO_M = \dfrac{2AA_1}{3}$

2) Найти биссектрису $AA_2 = l_a$; $CA_2 = \dfrac{ab}{b+c}$; $AO_B = \dfrac{(b+c)l_a}{a+b+c}$.

3) $A_1A_2 = CA_1 - CA_2 = \dfrac{ac}{2(b+c)}$.

4) В ΔA_1AA_2 известны длины всех сторон, поэтому можно найти cos F A_1AA_2.

5) В Δ O_MAO_B по теореме косинусов можно найти O_MO_B.

Пример 4. $AC = 9$, $AB = 18$, $BC = 21$. O_MO_B – ?

Решение. 1) Медиана $AA_1 = 1{,}5\sqrt{41}$ и $AO_M = \sqrt{41}$.

2) Биссектриса $AA_2 = 8;\ CA_2 = 7;\ AO_B = \dfrac{9}{2}$.

3) $A_1A_2 = \dfrac{7}{2}$.

4) $\triangle\ A_1AA_2\ \cos\varphi = \dfrac{6}{\sqrt{41}}$, где $\varphi = \angle\ A_1AA_2$.

5) В Δ O_MAO_B по теореме косинусов *OMOB*2 = . $O_MO_B{}^2 = \dfrac{29}{4}$.

Ответ: $O_MO_B = \dfrac{\sqrt{29}}{2}$

2. *Между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан (центр тяжести)*

O – центр описанной окружности, *OM* – точка пересечения медиан, A_1 и C_1 – середины сторон соответственно *AB* и *BC* (рис. 4 и 5).

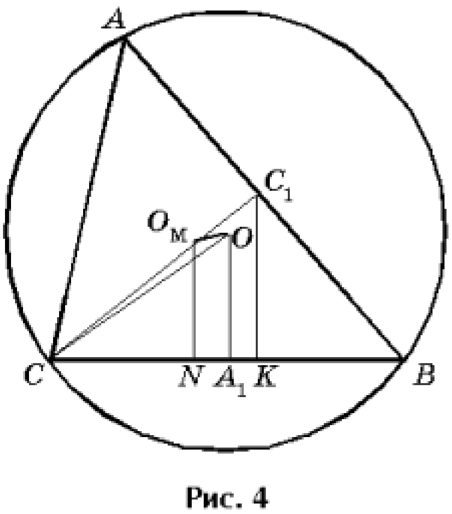


Рис. 4

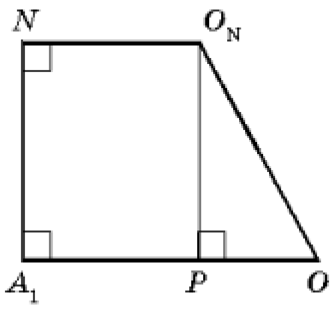


Рис. 5

1) В Δ C_1KB $BC_1 = \dfrac{c}{2},\ C_1K = 0{,}5c\sin\beta,\ KB = 0{,}5c\cos\beta.$

Тогда CK=a-0,5c cos β

2) Δ CC_1K подобен Δ CO_MN. Тогда $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

поэтому $CN = \frac{2}{3}a - \frac{c\cos\beta}{3},\ NO_M = \frac{c\sin\beta}{3} = \frac{bc}{6R}\ \left(\sin\beta = \frac{b}{2R}\right)$

3) Из 2) $NA_1 = CA_1 - CN = \ldots = \frac{2c\cos\beta - a}{6}$

4) F $A = \alpha$, тогда F $COB = 2\alpha$, поэтому F COA- $= \alpha$, $OA_1 = R\cos\alpha$.

5) $OP = OA_1 - NO_M = R\cos\alpha - \frac{bc}{6R} = \frac{6R^2\cos\alpha - bc}{6R}$

6) В $\Delta\ OPO_M$ по теореме Пифагора

$$O_MO^2 = O_MP_2{}^2 + PO^2 = A_1N^2 + PO^2 = \frac{r^2(2c\cos\beta - a)^2 + (6R^2\cos\alpha - bc)^2}{36R^2}$$

Известно, что $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$, $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$ (теорема косинусов);

$\sin\beta = \frac{b}{2R},\ \sin\alpha = \frac{a}{2R}$

(теорема синусов).

$$O_MO^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Пример 5. Стороны треугольника $AB = 30$, $BC = 28$, $CA = 26$. Найти расстояние между центром описанной около треугольника окружности и точкой пересечения медиан.

Решение. 1) Найдем площадь треугольника по формуле Герона, $S = 336,\ R = \frac{65}{4}.$

2) sin b = . $\alpha = \frac{33}{65},\ \cos\beta = \frac{3}{5},\ \sin\beta = \frac{4}{5}.$

3) В $\Delta\ C_1KB$ $BC_1 = 15$, $C_1K = 12$, $KB = 9$, тогда $CK = 19$.

4) $\Delta\ CC_1K$ подобен њ CO_MN. Тогда $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

поэтому $CN = \frac{38}{3},\ NO_M = 8.$

5) $NA_1 = CA_1 - CN = \frac{4}{3}.$

6) $OA_1 = R\cos\alpha = \frac{33}{4};\ OP = \frac{1}{4}.$

7) В $\Delta\ OPO_M$ по теореме Пифагора $O_MO^2 = O_MP^2 + PO^2 = \frac{265}{144}.$

Ответ: $O_MO = \dfrac{\sqrt{265}}{12}$.

3. *Между центром описанной окружности и центром вписанной окружности*

O_1 – центр описанной, O_2 – центр вписанной окружностей (рис. 6 и 7).

1) F $A = \alpha$, F $CO_1B = 2\alpha$, поэтому F $BO_1K = \alpha$, $O_1K = R\cos\alpha$ и $BK = \dfrac{a}{2}$.

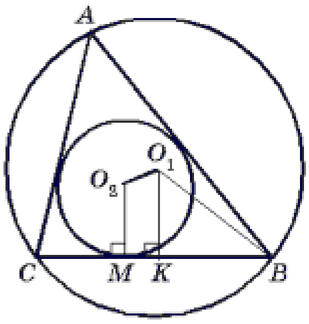


Рис. 6

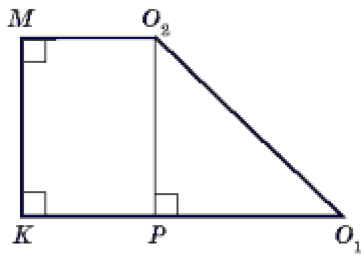


Рис. 7

2) Так как O_2 – центр вписанной окружности, то $O_2M = r$.

3) Так как из точек A, B, C проведены по две касательные к описанной окружности, то отрезки касательных, концами которых являются точки касания и вершины треугольника, равны и можно показать, что $BK = p - b$.

Поэтому $KM = \dfrac{a}{2} - (p - b) = \dfrac{b - c}{2}$

4) $O_1P = R\cos\alpha - r$.

5) В $\Delta\ O_1PO_2$ (рис. 7) по теореме Пифагора имеем

$O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P = O_1P^2 + KM^2$,

$$O_1O_2^{\,2} = \frac{(R\cos\alpha - r)^2 + (b-c)^2}{4} = \frac{r^2 - 2Rr\cos\alpha + R^2\cos^2\alpha + (b-c)^2}{4} =$$

$$= \frac{R^2 - 2Rr + r^2 + 2Rr(1-\cos\alpha) - R^2\sin^2\alpha + (b-c)^2}{4}.$$

Упростим

Упростим

Тем самым формула Эйлера $O_1O_2^2 = R^2 - 2Rr$.

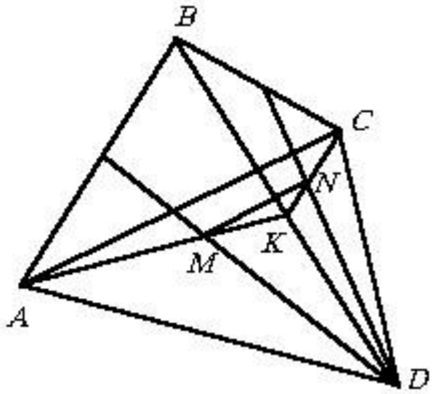
6.4. Медианы и биссектрисы треугольника

Известно, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пример 6.4.1. (КубГУ, матем., 1979 г.)

В выпуклом четырехугольнике *ABCD* расстояние между точками пересечения медиан треугольников *ABD* и *BCD* равно *a*. Определить *AC*.

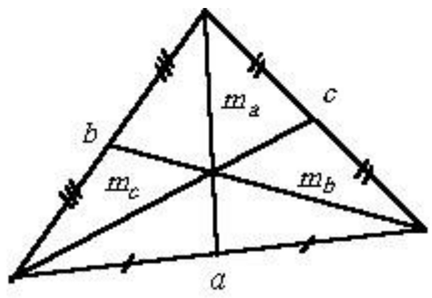
Решение



Пусть *M* и *N* – точки пересечения медиан в треугольниках *ABD* и *BCD* соответственно и *K* – середина отрезка *BD*. Тогда $\frac{CK}{NK} = \frac{AK}{MK} = 3$, и по первому признаку треугольники *AKC* и *MKN* подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. Поэтому *AC = 3 MN = 3 a*.

Ответ: *3a*.

Для нахождения медианы треугольника по трем его сторонам удобно использовать рассуждения при решении типовой задачи из примера 6.2.7 а).



$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Пример 6.4.2.

Определить стороны треугольника, если его медианы равны $\sqrt{10}$, $\sqrt{31}$ и $\sqrt{46}$.

Решение

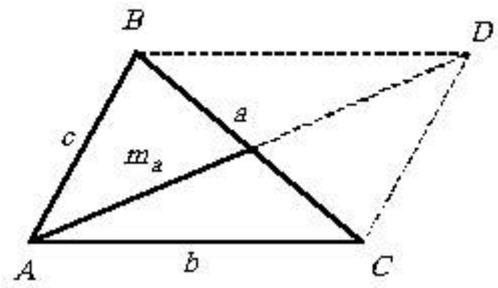
Полагая в предыдущих трех равенствах $a^2 = x$, $b^2 = y$ и $c^2 = z$, после возведения обеих частей в квадрат получим

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(2x+2y-z)=10, \\ \frac{1}{4}(2x-y+2z)=31, \\ \frac{1}{4}(-x+2y+2z)=46. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений, найдем $x = 16$, $y = 36$ и $z = 64$, а значит стороны треугольника равны $4; 6$ и 8.

Ответ: $4; 6$ и 8 .

✍ *При решении задач, в которых упоминается медиана треугольника, часто достраивают треугольник до параллелограмма так, чтобы медиана была половиной диагонали.*



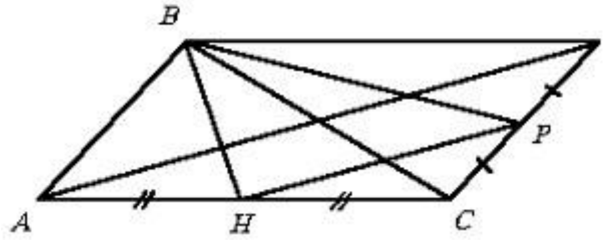
Так как в параллелограмме сумма квадратов всех его сторон равна сумме квадратов диагоналей, то $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$*, и опять получаем выражение медианы через стороны треугольника:*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Пример 6.4.3.

Доказать, что три данных отрезка могут быть медианами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда из них можно составить треугольник.

Указание: при выполнении этого задания следует учесть, что для любого треугольника *ABC* можно составить треугольник *BHP* из его медиан как указано на рисунке, а по треугольнику из медиан *BHP* можно восстановить треугольник *ABC*.



Пример 6.4.4. (КубГУ, матем., 1986 г.)

Длина медианы *BK* остроугольного треугольника *ABC* равна *8* см. Длины ортогональных проекций этой медианы на стороны *AB* и *BC* равны *6* см и $5\sqrt{2}$ см соответственно. Найти длину стороны *AC*.

Решение

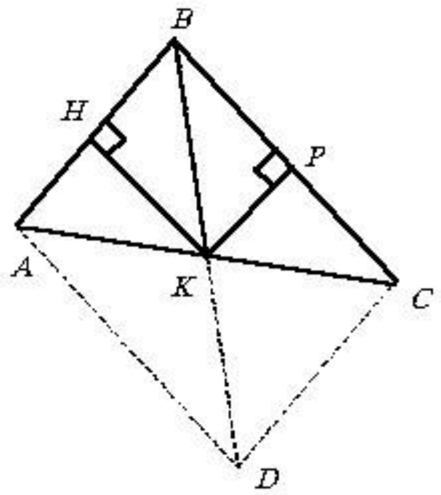
Пусть *AK* = *BK* = *x* (см. рисунок).

По теореме Пифагора имеем

$$HK^2 = BK^2 - BH^2 = 8^2 - 6^2 = 28$$

и $PK^2 = BK^2 - BP^2 = 8^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 14$,

а значит $AH = \sqrt{AK^2 - HK^2} = \sqrt{x^2 - 28}$ и $PC = \sqrt{KC^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 14}$.



Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма *ABCD* равна сумме квадратов всех его сторон, то получаем уравнение $(2x)^2 + 16^2 =$

$$= 2\left(\left(6 + \sqrt{x^2 - 28}\right)^2 + \left(5\sqrt{2} + \sqrt{x^2 - 14}\right)^2\right)$$

.

После преобразований имеем

$$6\sqrt{x^2 - 28} + 5\sqrt{2x^2 - 28} = 42.$$

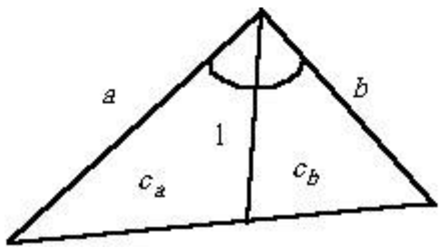
Для удобства, полагая $x^2 - 28 = 4t^2 \quad (t \geq 0)$, получаем

$$6 \cdot 2t + 5\sqrt{8t^2 + 28} = 42$$

или $21 - 6t = 5\sqrt{2t^2 + 7}$.

После преобразований получаем $t^2 + 8t - 9 = 0$, и поэтому $t = 1$.
Откуда находим $x^2 = 4t^2 + 28 = 32$ и $x = 4\sqrt{2}$.
Поэтому $AC = 2x = 8\sqrt{2}$ (см).
Ответ: $8\sqrt{2}$ см.

Перейдем к рассмотрению биссектрис треугольника. Известно, что все биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник. Имеет место следующая теорема.



Теорема о биссектрисе

Основание биссектрисы внутреннего угла треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. согласно имеющемуся рисунку

$$\frac{c_a}{a} = \frac{c_b}{b}.$$

Удобно теорему формулировать так:

а) существует t такое, что $c_a = a \cdot t$ *и* $c_b = b \cdot t$;

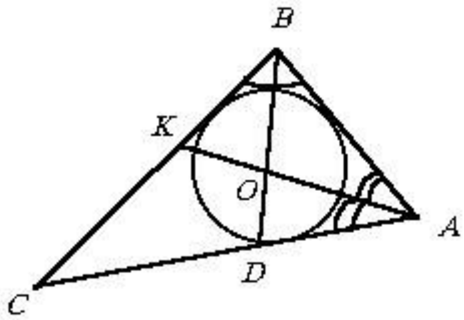
б) существует k такое, что $a = k \cdot c_a$ *и* $b = k \cdot c_b$.

Докажите эту теорему, используя теорему синусов.

Пример 6.4.5.

Найти биссектрису угла *B* треугольника *ABC* и определить, в каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит эту биссектрису, если *AB* = *4*, *BC* = *5* и AC = 6.

Решение



Пусть *BD* и *AK* – биссектрисы углов *B* и *A* треугольника *ABC* и *O* – центр вписанной окружности.

Так как *AB = 4* и *BC = 5*, то по теореме о биссектрисе *AD = 4t* и *CD = 5t*, поэтому *AC = 6 = 4t + 5t*, т.е. $t = \frac{2}{3}$, и тогда $AD = \frac{8}{3}$.

Теперь решим типовую задачу, подобную задаче в примере 6.2.7 а):

$\cos\angle A = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2\cdot 6\cdot 4} = \frac{9}{16}$ и

$$BD^2 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2\cdot 4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{16} = \frac{100}{9}\text{, т.е. } BD = \frac{10}{3}.$$

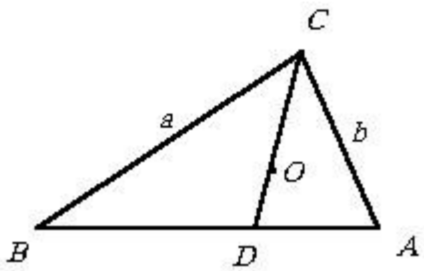
И, наконец, определим по теореме о биссектрисе из треугольника *BAD*, в каком отношении точка *O* делит отрезок *BD*:

$$\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{8/3} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{10}{3}$ и $\frac{3}{2}$.

✍*Полезной и легко запоминаемой является формула*

$$1 = \sqrt{ab - c_a\cdot c_b},$$



а также отношения, которые позволяют установить, как точка пересечения биссектрис делит биссектрису .

$$\frac{CO}{OD} = \frac{a+b}{c}.$$

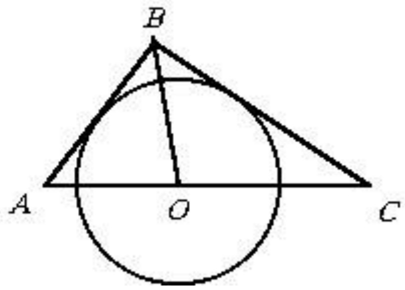
Однако на вступительном экзамене, используя эту формулу, желательно делать ее вывод, так как она выходит за рамки стандартной школьной программы. Попробуйте самостоятельно вывести эту формулу, используя рассуждения, подобные решению примера 6.2.7 а), а также теорему о биссектрисе.

Биссектриса угла, меньшего 180°, – это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла, а также это геометрическое место точек – центров окружностей, вписанных в этот угол.

Пример 6.4.6.

В треугольнике *ABC* известно, что *AB = 4*, *BC = 5* и $\angle B = \arccos\frac{1}{8}$. Центр *O* окружности, вписанной в угол *B*, лежит на стороне *AC*. Найти *BO*.

Решение



Ясно, что *BO* – биссектриса угла *B*. По теореме косинусов находим $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B =$

$= 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{8} = 36$, т.е. *AC = 6*.

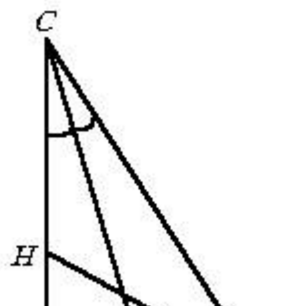
Далее, как и в примере 6.4.5. находим $BO = \frac{10}{3}$.

Ответ: $BO = \frac{10}{3}$.

Пример 6.4.7. (КубГУ, физич., 1975 г.)

Найти биссектрисы острых углов в прямоугольном треугольнике, катеты которого равны *6* и *8* см.

Решение



Пусть *ABC* – прямоугольный треугольник, у которого *AB = 6, BC = 8, ∠B = 90 °*, *P* и *H* – основания биссектрис углов *C* и *A* соответственно.

Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
По теореме о биссектрисе *BP = 8t* и *Pa = 10t* **,**

откуда *AB = AB = 6 = 8t + 10t* и $t = \frac{1}{3}$.

Поэтому $BP = \frac{8}{3}$, и по теореме

Пифагора $CP = \sqrt{8^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$. Аналогично находим $AH = 3\sqrt{5}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ см, $3\sqrt{5}$ см.